Susanne PREDIGER, Dortmund

Konzeptwechsel in der Bruchrechnung – Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht

Ein Symposium zu Fehleranalysen in der Bruchrechnung, ist das aus konstruktivistischer Sicht überhaupt noch angemessen, wenn Kompetenz- statt Defizitorientierung groß geschrieben wird? Ja, denn auch aus konstruktivistischer Sicht lohnt sich die Analyse von individuellen Vorstellungen (gerade wenn diese von den intendierten fachlichen Vorstellungen abweichen), um mögliche Lernpfade zur Weiterentwicklung auszumachen und ressourcenorientiert geeignete Lernanlässe zu entwickeln. Ein angemessener Umgang mit Fehlern geht also über die Schaffung einer angstfreien Atmosphäre und das gezielte Thematisieren von Fehlern deutlich hinaus, die oft allein im Zentrum einer neuen Fehlerkultur stehen. In diesem Kurzbeitrag werden zwei dafür zentrale Forschungstraditionen zusammengebracht (vgl. Prediger 2007 für eine ausführlichere Darstellung vieler Aspekte).

1. Forschungstradition: Grundvorstellungen

Mit dem Konzept der Grundvorstellungen wird vor allem in Deutschland seit vielen Jahren die Wichtigkeit des inhaltlich-semantischen Denkens gegenüber dem reinen Kalkül betont; auf *präskriptiver Ebene* als Bestandteil von Unterrichtskonzepten (z. B. für Brüche Malle 2004, Winter 1999), und auf *deskriptiver Ebene* zur Analyse von Schülerleistungen (seit vom Hofe 1995, in diesen BzMU 2007 durch Kleine und Wartha). Die deskriptive Dimension wird international auch unter dem Begriff der mentalen (zuweilen impliziten) Modelle als die bedeutungsvollen Interpretationen mathematischer Inhalte thematisiert (Fischbein 1989, S. 129) und soll hier in Abgrenzung zu der fachlichen Kategorie der angestrebten *Grundvorstellung* als *individuelle inhaltliche Vorstellung* oder *Interpretationen* bezeichnet werden.

Empirische Untersuchungen zeigen immer wieder, dass gerade nicht hinreichend entwickelte inhaltliche Vorstellungen ein Hindernis auch für die Mathematisierungskompetenzen darstellen (für Brüche z. B. Fischbein et al. 1985, vom Hofe / Wartha 2005).

2. Forschungstradition: Conceptual Change (Konzeptwechsel)

International hat sich in den letzten Jahren zunehmend ein zweiter Erklärungsstrang für Schwierigkeiten in der Bruchrechnung etabliert, in dem die Diskontinuitäten zwischen natürlichen Zahlen und Brüchen als epistemologische Denkhürde hervorgehoben wurden.

Aspekt	Natürliche Zahlen	Brüche
Kardination	Eine Zahl ist die Antwort auf die Frage "Wie viele?"	Ein Bruch beschreibt Anteile, relative Anteile, Quotienten, Verhältnisse, ...
Symbolische Repräsentation	eindeutige symbolische Darstellung / Repräsentation einer Zahl	eine Bruchzahl wird durch viele Brüche repräsentiert
Ordnung	unterstützt durch natürliche Zählfolge	nicht durch natürliche Zählfolge gestützt
	Existenz eines eindeutigen Nachfolgers (Diskretheit)	kein eindeutiger Vorgänger und Nachfolger (Dichtheit)
	keine Zahl zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen	Dichtheit: unendlich viele Bruchzahlen zwischen je zwei Zahlen
Addition – Subtraktion	unterstützt durch natürliche Zählfolge	nicht durch natürliche Zählfolge gestützt
Multiplikation	Multiplikation vergrößert immer (außer bei 0,1)	Multiplikation vergrößert (für a>1) oder verkleinert (für a<1)
Division	Dividieren verkleinert immer	Division verkleinert oder vergrößert

Tabelle 1: Überblick über Diskontinuitäten von Konzepten bei Zahlbereichserweiterung

So sprach etwa Streefland (1984) von „$\mathbb{N}$-Verführern“, und Hartnett / Gelman (1998) beschrieben Vorverständnisse von den natürlichen Zahlen als Hindernisse für die Konstruktion neuer Konzepte über Brüche, weil Lernende Kontinuitäten erzeugen, wo die mathematische Stoffstruktur Diskontinuitäten mit sich bringt. Tabelle 1 gibt einen systematisierenden Überblick über die meist zitierten Diskontinuitäten (aus Prediger 2007, ähnlich in Stafylidou/Vosniadou 2004, Winter 1999).

Inwiefern diese Diskontinuitäten in der Stoffstruktur Schwierigkeiten im Lernprozess erzeugen können, kann gut vor dem theoretischen Hintergrund des Conceptual Change Ansatzes erklärt werden, der zunächst in den Naturwissenschaftsdidaktiken und der Psychologie (Posner et al. 1982, Duit 1999) und zunehmend auch in Bezug auf Mathematiklernen aktiviert wird (Lehtinen et al. 1997, Merenluoto/Lehtinen 2002, Vamvakoussi/Vosniadou 2002, Vosniadou/Verschaffel 2004, Lehtinen auf der ICME 2004).

Auf der Basis einer konstruktivistischen Lerntheorie und inspiriert durch Piagets Konzept der Akkomodation wird im Conceptual Change Ansatz betont, dass Lernen nicht kumulativ verläuft in dem Sinne, dass neue Wissenselemente zu bereits existierenden „addiert“ werden (als ein Prozess der Anreicherung). Statt dessen erfordert Lernen in vielen Bereichen eine Reorganisation von Vorwissen, wenn es mit neuen Erfahrungen und Herausforderungen konfrontiert ist. Probleme des *Konzeptwechsels* (Conceptual Change) können auftreten, wenn das Vorwissen der Lernenden mit den neuen, notwendigen Konzeptualisierungen inkompatibel ist und die Reorganisation des Wissens nicht reibungslos gelingt.

Eine zentrale Idee des Conceptual Change Ansatzes ist dabei, die Diskrepanzen zwischen intendierten fachlichen Konzepten und individuellen Konzepten nicht als (möglichst zu vermeidende) Fehler zu begreifen, also als individuelles Versagen, sondern als typische Etappen des Übergangs in dem Prozess der Rekonstruktion von Wissen (Duit 1999). Der Ansatz bietet somit eine interessante Möglichkeit, (als sinnvoll begriffene) individuelle Denkweisen und ihre Schwierigkeiten aus einer nicht defizitorientierten Sichtweise zu analysieren.

Das didaktische Interesse muss dann dahin gehen, diese Denkweisen durch Initiierung von Konzeptwechseln produktiv weiter zu entwickeln. Für diese präskriptive Dimension der Unterrichtsgestaltung haben Posner et al. (1981) durch empirische Studien Bedingungen spezifiziert, die einen notwendigen Konzeptwechsel befördern können: (1) wenn Unzufriedenheit mit den vorhandenen Konzepten entsteht, (2) wenn die neuen Konzepte zugänglich erscheinen (und für Lernende Sinn machen), (3) wenn die neuen Konzepte plausibel erscheinen, d.h. bessere Erklärungen liefern als die bestehenden und (4) wenn die neuen Konzepte fruchtbar erscheinen (d.h. in breitem Feld angewendet werden können).

Diese Bedingungen können jedoch nur dann erfolgreich umgesetzt werden, wenn die *Ursachen der Diskrepanzen* zwischen individuellen und fachlichen Sichtweisen angemessen lokalisiert werden können (vgl. Prediger 2003).

Kritik der 2. Forschungstradition: Wo bleibt das inhaltliche Denken?

Hier zeigt sich eine Beschränkung der Forschungstradition des Conceptual Change: Alle für Brüche in Tabelle 1 zusammengestellten Konzepte beziehen sich auf die Ebene intuitiver Regeln und Gesetzmäßigkeiten (wie z. B. „Multiplizieren vergrößert“), die jedoch die in der ersten Forschungstradition fokussierte inhaltlich-semantische Ebene gar nicht einbezieht.

Dabei konnte in einer empirischen Studie (Prediger 2007) für das Beispiel der Multiplikation nachgewiesen werden, dass die Aufrechterhaltung der intuitiven Regel „Multiplizieren vergrößert immer“ unmittelbar verknüpft ist mit nicht vollzogenen Konzeptwechseln auf der Ebene individueller Vorstellungen, sie also mit den Interpretationen mathematischer Objekte zusammenhängt. In der Studie zeigte sich konkret, dass diejenigen, die eine tragfähige inhaltliche Vorstellung zur Multiplikation aufgebaut hatten (etwa als von-Deutung oder als Skalieren), auch eher ihr intuitives Konzept von der Ordnungseigenschaft der Multiplikation bereits gewandelt hatten, während diejenigen ohne tragfähige inhaltliche Interpretation der Multiplikation deutlich eher an dem für Bruchzahlen nicht mehr tragfähigen Konzept „Multiplizieren vergrößert“ festhielten. Wer als einzige inhaltliche Interpretation der Multiplikation über die zeitlich-sukzessive Vorstellung der fortgesetzten Addition verfügt, scheint somit keine geeignete Basis für die Weiterentwicklung seines Konzepts zur Ordnungseigenschaft der Multiplikation zu haben.

Plädoyer für die Analyse von Konzeptwechseln bei Interpretationen

Als Synthese beider Forschungstraditionen ergibt sich insgesamt die Notwendigkeit, auch die Kontinuitäten und Diskontinuitäten auf der Ebene der mathematischen Grundvorstellungen noch konsequenter in den Blick zu nehmen (so wie in Tabelle 2 angedeutet) und auf dieser Basis Prozesse des Konzeptwechsels auf der Ebene der individuellen inhaltlichen Vorstellungen, also der Interpretationen mathematischer Operationen und Objekte zu analysieren.

Natürliche Zahlen	Brüche
fortgesetztes Hinzufügen (3 · 5 als 5+5+5, z. B. 3 Stäbe der Länge 5m aneinander)	???
Rechtecksfläche (3 · 5 als Flächeninhalt eines 3cm x 5cm Rechtecks)	Rechtecksfläche (2/3 · 5/4 als Flächeninhalt eines Rechtecks 2/3 cm x 5/4 cm)
????	Anteil-von-Deutung (2/3 · 5/2 als 2/3 von 5/2)
Multiplikativer Vergleich (zwei mal so viel)	Multiplikativer Vergleich (halb so viel)
Skalieren / Vergrößern (3 · 5 als 5cm dreifach vergrößert)	Vergrößern / Verkleinern (2/3 · 5/2 als 5/2 cm, verkleinert auf 2/3 dessen)
kombinatorische Deutung (3 · 5 als Anzahl der Möglichkeiten, 3 T-Shirts mit 5 Hosen zu kombinieren)	????

Tabelle 2: (Dis-)Kontinuitäten der Grundvorstellungen zur Multiplikation beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Brüchen

Hinweis zur Literatur

Die Literaturangaben zu diesem Kurzbericht finden sich in dem Artikel

Prediger, Susanne (2007): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions, erscheint in Learning and Instruction, Vol. 17 (2007).